

Математика

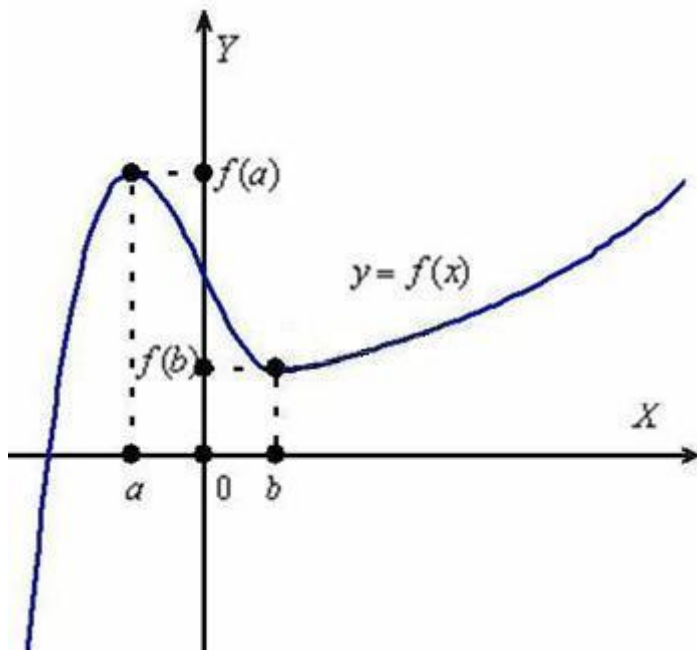
Группа №6 «Мастер по лесному х/ву»

преподаватель Давыдова Л.Г.

адрес dawidowa.liubov@yandex.ru

Тема: Производная.

Рассмотрим некоторую дорогу $y = f(x)$



полагаем, что функция непрерывна на рассматриваемом участке.

На интервалах $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$ функция **возрастает**, то есть каждое следующее её значение **больше** предыдущего. Грубо говоря, график идёт *снизу вверх* (забираемся на горку). А на интервале (a, b)

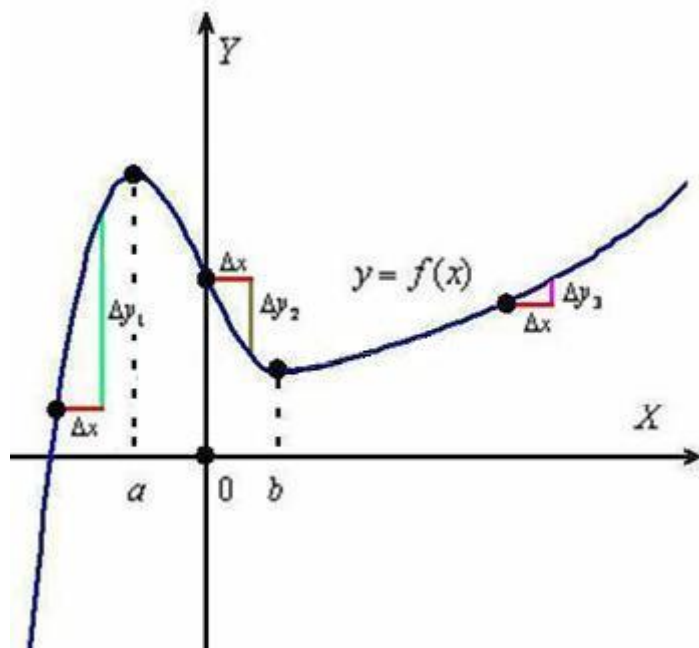
функция **убывает** – каждое следующее значение **меньше** предыдущего, и наш график идёт *сверху вниз* (спускаемся по склону).

Также обратим внимание на особые точки. В точке $x = a$ мы достигаем **максимума**, то есть *существует* такой участок пути, на котором значение $f(a)$ будет самым большим (высоким). В точке же $x = b$ достигается **минимум**, и *существует* такая её окрестность, в которой значение $f(b)$ самое маленькое (низкое).

Функция возрастает, но возрастает она **с разной скоростью**. И первое, что бросается в глаза – на интервале $(-\infty, a)$ график взмывает вверх *гораздо более круто*, чем на интервале $(b, +\infty)$. Нельзя ли измерить крутизну дороги с помощью математического инструментария?

Скорость изменения функции

Идея состоит в следующем: возьмём некоторое значение Δx (читается «дельта икс»), которое назовём **приращением аргумента**, и начнём его «примерять» к различным точкам нашего пути:



Представим себе прямую дорогу, проходящую по холмистой местности. То есть она идет то вверх, то вниз, но вправо или влево не поворачивает.

Исследуем природу полученной дроби содержательнее. Пусть изначально мы находимся на высоте 20 метров (в левой чёрной точке). Преодолев расстояние $\Delta x = 10$ метров (левая красная линия), мы окажемся на высоте 60 метров. Тогда приращение функции составит $\Delta y_1 = 60 - 20 = 40$ метров

(зелёная линия) и: $\frac{\Delta y_1}{\Delta x} = \frac{40}{10} = 4$. Таким образом, **на каждом метре** этого участка дороги **высота увеличивается в среднем на 4 метра**. Иными словами, построенное отношение характеризует **СРЕДНЮЮ СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ** (в данном случае – роста) функции.

Примечание: числовые значения рассматриваемого примера соответствуют пропорциям чертежа лишь приблизительно.

2) Теперь пройдем то же самое расстояние Δx от самой правой чёрной точки. Здесь подъём более пологий, поэтому приращение Δy_3 (малиновая

линия) относительно невелико, и отношение $\frac{\Delta y_3}{\Delta x}$ по сравнению с предыдущим случаем будет весьма скромным. Условно

говоря, $\Delta x = 10$, $\Delta y_3 = 5$ метров и **скорость роста**

функции составляет $\frac{\Delta y_3}{\Delta x} = \frac{5}{10} = 0,5$. То есть, здесь на каждый метр пути приходится *в среднем* пол метра подъёма.

3). Посмотрим на верхнюю чёрную точку, расположенную на оси ординат. Предположим, что это отметка 50 метров. Снова преодолеваем расстояние $\Delta x = 10$, в результате чего оказываемся ниже – на уровне 30-ти метров. Поскольку осуществлено движение **сверху вниз** направлению оси OY , то итоговое **приращение функции (высоты) будет**

отрицательным: $\Delta y_2 = 30 - 50 = -20$ метров (коричневый отрезок на чертеже). И в данном случае речь уже идёт о **скорости**

убывания функции: $\frac{\Delta y_2}{\Delta x} = \frac{-20}{10} = -2$, то есть за каждый метр пути этого участка высота убывает *в среднем* на 2 метра.

Чем меньше значение Δx , тем точнее мы опишем рельеф дороги. Более того, справедливы следующие факты:

– Для **любой** точки подъёмов $(-\infty, a), (b, +\infty)$ можно подобрать значение Δx (пусть и очень малое), которое уместится в границах того или иного подъёма. А это значит, что соответствующее приращение высоты Δy

будет гарантированно положительным, и неравенство $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ корректно укажет рост функции в каждой точке этих интервалов.

– Аналогично, для **любой** точки склона (a, b) существует значение Δx , которое полностью уместится на этом склоне. Следовательно, соответствующее приращение высоты Δy однозначно отрицательно, и неравенство $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ корректно покажет убыль функции в каждой точке данного интервала.

– Особо интересен случай, когда скорость изменения функции равна

нулю: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Во-первых, нулевое приращение высоты ($\Delta y = 0$) – признак ровного пути... Если сделать небольшой шаг Δx в любую сторону, то изменение высоты Δy будет ничтожно мало, и можно сказать, что

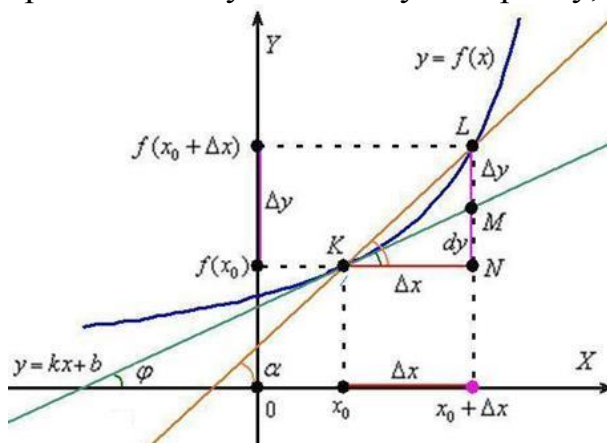
скорость изменения функции $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ фактически нулевая. В точках $x = a, x = b$ наблюдается именно такая картина.

Таким образом, мы подошли к удивительной возможности идеально точно охарактеризовать скорость изменения функции. Ведь математический анализ позволяет устремить приращение аргумента к нулю: $\Delta x \rightarrow 0$, то есть сделать его **бесконечно малым**.

«раскрутка» производной начинается с её изучения в отдельно взятой точке:

Производная функции в точке

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ (синий график), которая определена и непрерывна на некотором интервале, **произвольную** точку x_0 , принадлежащую данному интервалу, и соответствующее значение $f(x_0)$:



Зададим аргументу функции приращение Δx (красный отрезок) в точке x_0 . Обратите внимание, что $x_0 + \Delta x$ — это тоже вполне определённая точка нашего интервала (на всякий случай отметил её малиновым цветом). И в этой точке существует своё значение функции $f(x_0 + \Delta x)$.

Приращение аргумента Δx повлекло за собой приращение функции:
 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (малиновый отрезок)

В данном случае $\Delta y > 0$, поскольку в качестве примера выбран промежуток, на котором функция возрастает.

Определение: производной функции в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx в этой точке при $\Delta x \rightarrow 0$. Или коротко:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Если данный предел *конечен*, то функция $y = f(x)$

является **дифференцируемой** в точке x_0 . А то, что в львиной доле

случаев предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *существует и конечен*,

И, конечно же, не забываем **о важнейшей особенности предела, как такового:** ПРИНЦИПИАЛЬНЫЙ МОМЕНТ состоит в том, что приращение аргумента стремится к нулю, но нуля не достигает, иными словами, величина Δx **бесконечно мала**, но не равна нулю!

Производная функции это отношение приращения функции к приращению аргумента при бесконечно малом приращении аргумента. **Приращением** в математике называют изменение.

То, насколько изменился аргумент x при продвижении вдоль оси Ox называется **приращением аргумента** и обозначается Δx .

То, насколько изменилась функция (высота) при продвижении вперед вдоль оси Ox на расстояние Δx , называется **приращением функции** и обозначается Δf . Итак, производная функции $f(x)$ – это отношение Δf к Δx при $\Delta x \rightarrow 0$.

Обозначаем производную той же буквой, что и функцию, только со штрихом сверху справа: $f'(x)$

Итак, запишем формулу производной, используя эти обозначения:

$$f'(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

Как и в аналогии с дорогой здесь при возрастании функции производная положительна, а при убывании – отрицательна.

А бывает ли производная равна нулю?

Конечно. Например, если мы едем по ровной горизонтальной дороге, крутизна равна нулю. И правда, высота ведь не совсем меняется. Так и с производной: производная постоянной функции (константы) равна нулю:

$$C' = 0, C = \text{const}$$

так как приращение такой функции равно нулю при любом Δx

Контрольные вопросы

1. В каком интервале функция возрастает?
2. В каком интервале функция убывает?
3. Что такое средняя скорость изменения функции?
4. Что такое производная?
5. Какова особенность предела?
6. Что такое приращение?
7. Как обозначается производная?
8. Когда производная равна нулю?