

Математика

Группа №6 «Мастер по лесному х/ву»

преподаватель Давыдова Л.Г.

адрес dawidowa.liubov @yandex.ru)

ТЕМА: Степень с рациональным показателем

Прочитать параграф 10 пункт 34. Учебник Алгебра и начала анализа под редакцией А. Н. Колмогорова.

Задания

1. Дать определение степени с рациональным показателем
2. Записать три замечания , следующие из определения.
3. Основные свойства степеней.
4. Решить № 430 на стр. 213.

9.1. Основные сведения

О Функция вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ называется **показательной функцией** (a — основание функции; x — показатель степени).

Основные свойства и соотношения показательной функции.

Свойство 1. Областью определения показательной функции $y = a^x$ является множество всех действительных чисел.

Свойство 2. Областью изменения показательной функции $y = a^x$ является множество всех положительных чисел, т.е. показательная функция может принимать только положительные значения ($a^x > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$).

Из этого следует, что уравнение $a^x = b$, где $b \leq 0$, решений не имеет.

П $2^{-3} > 0$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{2}} > 0$; $5^{2x} = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = -\frac{4}{5} \Rightarrow x \in \emptyset$.

Свойство 3. Если $a^x = a^y$, то $x = y$ и, наоборот, если $x = y$, то $a^x = a^y$.

П $3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5$.

Свойство 4. $a^0 = 1$ и, наоборот, если $a^x = 1$, то $x = 0$.

П $7^0 = 1$; $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Свойство 5. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ и, наоборот, $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$.

П $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $5^{-3x} = \frac{1}{5^{3x}}$; $\frac{1}{3^{-2x}} = 3^{2x}$.

Свойство 6. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ и, наоборот, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

П $4^{3x+2} = 4^{3x} \cdot 4^2 = 16 \cdot 4^{3x}$; $25 \cdot 5^{4x} = 5^2 \cdot 5^{4x} = 5^{4x+2}$.

Свойство 7. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ и, наоборот, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

$$\text{II} \quad 3^{4x-2} = \frac{3^{4x}}{3^2} = \frac{1}{9} \cdot 3^{4x}; \quad \frac{4^{5x}}{16} = \frac{4^{5x}}{4^2} = 4^{5x-2}.$$

Свойство 8. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ и, наоборот, $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$.

II $(5^{3x})^2 = 5^{6x}$; $(27)^{2x} = (3^3)^{2x} = 3^{6x}$.

Свойство 9. $\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$; $\sqrt{a^x} = a^{\frac{x}{2}}$ и, наоборот, $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$; $a^{\frac{x}{2}} = \sqrt{a^x}$.

II $\sqrt[3]{7^{2x}} = 7^{\frac{2x}{3}}$; $\sqrt{5^{4x}} = 5^{2x}$; $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$; $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Свойство 10. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ и, наоборот, $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

$$\text{II} \quad 8^{2x} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = \left(8 \cdot \frac{1}{4}\right)^{2x} = 2^{2x}; \quad 50^{3x} = (25 \cdot 2)^{3x} = 25^{3x} \cdot 2^{3x}.$$

Свойство 11. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ и, наоборот, $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

$$\boxed{\Pi} \quad \frac{3^{3x}}{7^{3x}} = \left(\frac{3}{7}\right)^{3x}; \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^{4x}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} = \frac{4^{2x}}{5^{2x}}.$$

Исследование показательной функции. Рассмотрим поведение функции $y = a^x$ в зависимости от основания a .

- $a > 1$ Построим, например, график функции $y = 2^x$ (рис. 9.1).

а) Функция $y = a^x$ при $a > 1$ является монотонно возрастающей (из условия $x_2 > x_1$ следует, что $a^{x_2} > a^{x_1}$, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции). Это свойство применяется при решении показательных неравенств. Так, если $a > 1$ то из условия $a^x \geq a^y$ ($a^x \leq a^y$) следует, что $x \geq y$ ($x \leq y$).

б) Если $a > 1$, то при неограниченном возрастании аргумента x т.е. при $x \rightarrow +\infty$, значения функции $y = a^x$ также неограниченно возрастают, т.е. $y \rightarrow +\infty$; при неограниченном убывании аргумента x , т.е. при $x \rightarrow -\infty$, значения функции $y = a^x$ стремятся к нулю, оставаясь при этом положительными, т.е. $y \rightarrow 0$, но $y > 0$.

- в) Если $a > 1$, то $0 < a^x < 1$ при $x < 0$ и $a^x > 1$ при $x > 0$.
- $0 < a < 1$ Построим, например, график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

рис. 9.2.

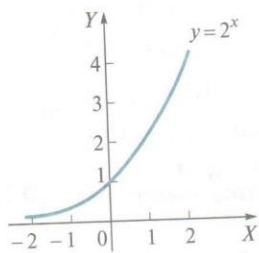


Рис. 9.1

x	y
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4

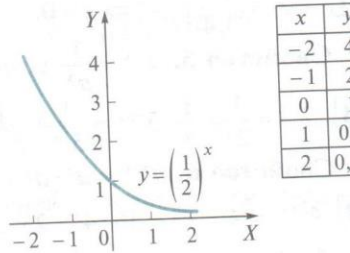


Рис. 9.2